Vortest zur Ingenieurmathematik

Liebe Studienanfängerinnen und Studienanfänger!

Sie haben sich für einen ingenieurwissenschaftlichen Studiengang entschieden. Ein wichtiges Rüstzeug für ein erfolgreiches Studium ist ein mathematisches Grundverständnis. Dabei geht es zum Einen um das reine Rechnen zum Anderen um eine Vorstellung von Strukturen. Mit diesem Vortest bieten wir Ihnen die Möglichkeit mal zu auszuprobieren, auf welches Wissen Sie zurückgreifen können.

Der Test in sechs Abschnitte zu verschiedenen Themen gegliedert, die Sie unabhängig voneinander bearbeiten können. Der Test soll Ihnen Anhaltspunkte liefern, an welchen Stellen Sie Ihr aktives Wissen gut ist oder wo Sie Ihre Fertigkeiten verbessern könnten. Mit (•) sind die Kernaufgaben markiert, Aufgaben mit einem etwas höherem Schwierigkeitsgrad erkennen Sie an den zwei Punkten (••).

Hinweise zur Bearbeitung

Drucken Sie sich am besten den Vortest aus, Sie können diesen Test direkt auf diesen Seiten bearbeiten. Lösen Sie die Aufgaben zunächst ohne Hilfsmittel insbesondere ohne Taschenrechner, auf eine Formelsammlung können Sie ggf. zurückgreifen.

Direkt vor Beginn des Mathematik-Repetitoriums werden die Lösungen veröffentlicht, so dass Sie Ihre Ergebnisse vergleichen können.

Viel Erfolg wünschen Ihnen,

Wigand Rathmann und Nicolai von Schroeders

I. Winkelfunktionen: Sinus, Kosinus, Tangens, Cotangens

Im ersten Abschnitt wird Ihr Wissen um die trigonometrischen Funktionen geprüft. Dazu werden neben graphischen Betrachtungen auch analytische Eigenschaften und Definitionen behandelt.

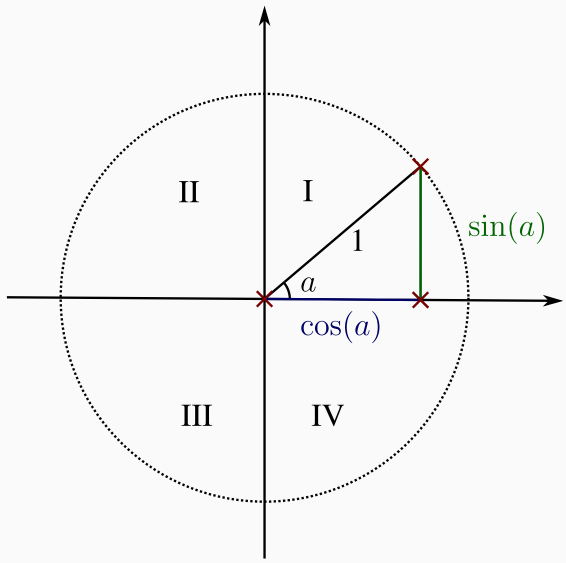
Aufgabe 1.1 (•)

Weisen Sie eindeutig durch Verbindung mit einer Linie die gelisteten Winkelfunktionen ihren Definitionen im rechtwinkligen Dreieck zu.

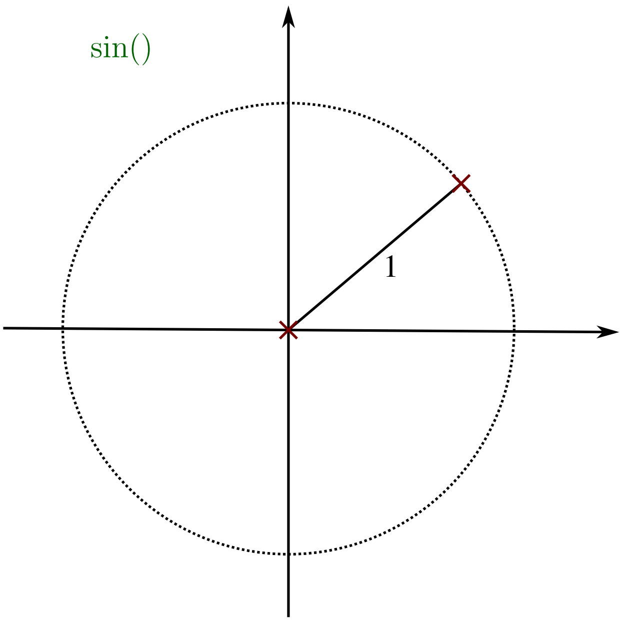
$\sin(\alpha)$	☐	$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
$\cos(\alpha)$	☐	$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(\alpha)$	☐	$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$
$\cot(\alpha)$	☐	$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

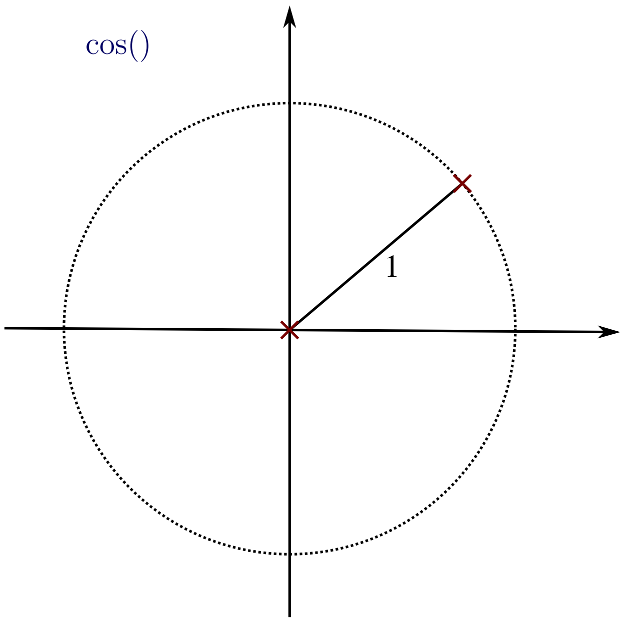
Aufgabe 1.2 (●●)

Aus dem Schulunterricht ist die Darstellung von Kosinus und Sinus am Einheitskreis bekannt.



Tragen Sie in die unteren Quadranten eindeutig jeweils das Vorzeichen (+ oder -) ein, das Sinus (links) und Kosinus (rechts) in diesen Quadranten annehmen.

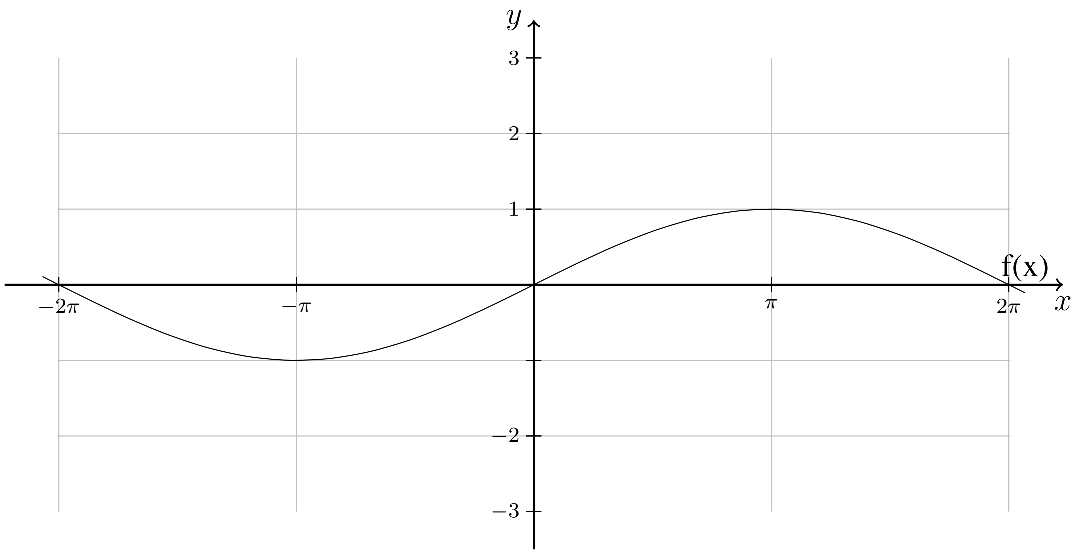




Aufgabe 1.3 (•)

Kreuzen Sie zu dem unteren Graphen in der folgenden Liste die Funktionsterme an, durch die der Graph beschrieben wird.

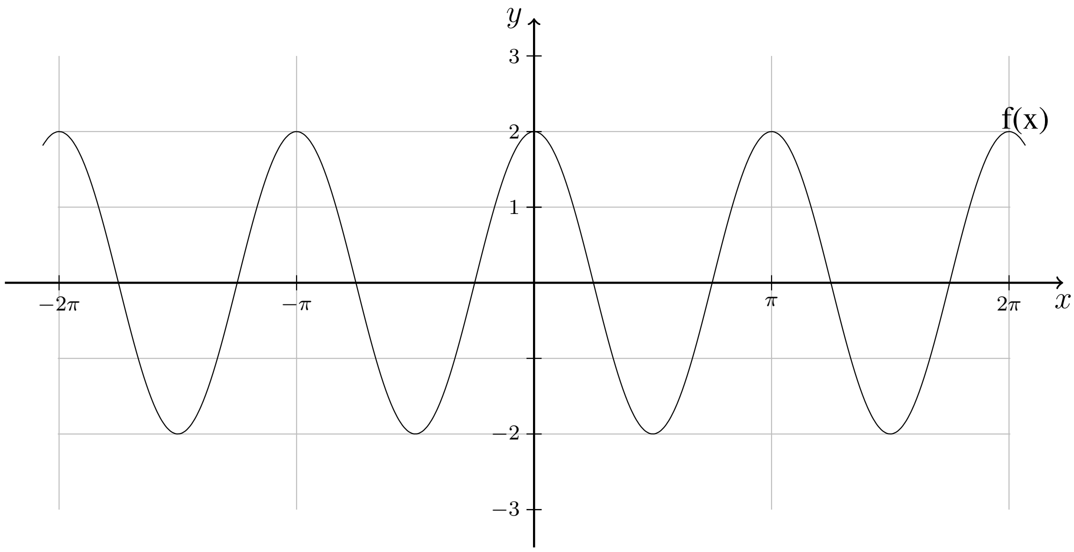
- ☐ $\sin(2x)$
- ☐ $\sin(x+1)$
- ☐ $\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\pi\right)$
- ☐ $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
- ☐ $\sin(x) + 1$
- ☐ $\cos\left(\frac{1}{2}x + 2\pi\right) + 1$



Aufgabe 1.4 (•)

Kreuzen Sie zu dem unteren Graphen in der folgenden Liste die Funktionsterme an, durch die der Graph beschrieben wird.

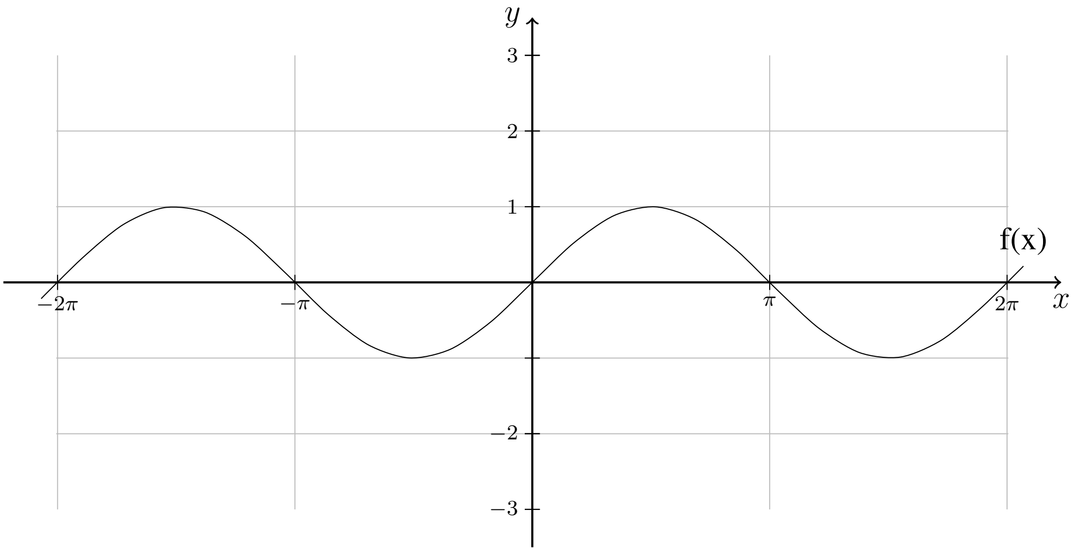
☐	$\cos(2x)$	☐	$\sin(2x)$
☐	$2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$	☐	$2\sin(2x)$
☐	$2\cos(x)$	☐	$2\cos(2x)$



Aufgabe 1.5 (●●)

Kreuzen Sie zu dem unteren Graphen in der folgenden Liste die Funktionsterme an, durch die der Graph beschrieben wird.

- [ ] $\tan(x)$ $qquad$
- [ ] $2\tan(x)$
- [ ] $\sin(x))$
- [ ] $\sin(x+\pi)$
- [ ] $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
- [ ] $\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)$



Aufgabe 1.6 (●●)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{9}x\right)$ mit $\mathbb{D} = [0; 9]$

a) Wo besitzt die Funktion Nullstellen?

b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes von $f(x)$.

II. e-Funktion, ln-Funktion / Potenz- & Logarithmusgesetze

In diesem Aufgabenteil werden Kenntnisse im Umgang mit Potenz- und Logarithmusgesetzen geprüft. Anhand von Gleichungen und wichtiger analytischer Eigenschaften wie dem Finden von Extrempunkten oder Symmetriebetrachtungen wird vertieftes Wissen geprüft, das die Basis zum Zeichnen von Potenz- und Logarithmusfunktionen schafft.

Aufgabe 2.1 (•)

Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$$\frac{e^{6x}e^{12x}e^{2y}}{e^{3x}} + \frac{e^{7y}e^{-3y}}{e^{2y}}$$

Aufgabe 2.2 (•)

Überprüfen Sie jede Aussage auf Richtigkeit und kreuzen Sie richtige Antworten an:

$a)$ $\ln(a \cdot b) =$

- ☐ $a \cdot \ln(b)$
- ☐ $\ln(a) - \ln(b)$
- ☐ $\ln(a) + \ln(b)$
- ☐ $\ln(a + b)$
- ☐ $\ln(a^b)$

$b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$ $(b \neq 0)$

- ☐ $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$
- ☐ $\ln(a) + \ln(\frac{1}{b})$
- ☐ $\ln(a) - \ln(\frac{1}{b})$
- ☐ $\ln(a) - \ln(b)$
- ☐ $\ln(a) + \ln(b)$

Aufgabe 2.3 (•)

Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$10^x \cdot 10^{4x} + 2^{5x} \cdot 5^{5x}$

Aufgabe 2.4 (•)

Gegeben sei die Gleichung $\dfrac{x^4yy^2x^2}{yx^5y^3} = x^m y^n$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Für welche m und $n \in \mathbb{N}$ stimmt diese Gleichung?

Aufgabe 2.5 (●●)

Bestimmen Sie jeweils die Lösung folgender Gleichungen.

a) $\ln(5x) - \ln(10) = 0$

b) $\ln(5x) - 10 = 0$

c) $e \cdot \ln(5x) - 10e = 0$

Aufgabe 2.6 (●●)

Bestimmen Sie von folgender Funktion Art und Lage der Extrempunkte.

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{3}e^{9x}}{x}$$

Aufgabe 2.7 (●●)

Sei $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$ und G der Graph von $f(x)$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G mit den Koordinatenachsen.

b) Untersuchen Sie die Funktion auf Punktsymmetrie zum Ursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von G im Unendlichen. Geben Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ der Funktion an.

III. Integration & Differentiation von Polynomen bis zur Ordnung 3

Dieser Block behandelt elementares Grundwissen der Analysis. Es müssen wichtige Regeln beim Bilden von Ableitungen und Stammfunktionen beherrscht und deren Zusammenhang erkannt werden.

Aufgabe 3.1 (●●)

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse über dem angegebenen Intervall J.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x\,, \quad J = [-1; 3]$

b) $f(x) = 2\sin(2x)\,, \quad J = \left[\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{4}\pi\right]$

Aufgabe 3.2 (•)

Nennen Sie drei wichtige Regeln beim Ableiten und wenden Sie diese jeweils anhand eines selbstgewählten Beispiels an.

Aufgabe 3.3 (●●)

Ordnen Sie folgende Funktionen ihren richtigen Ableitungen zu. ($a \in \mathbb{R}$)

	☐ $\sqrt[3]{5 \cdot x^4}$
	☐ $\ln(ax)$
$f(x) = \sqrt[3]{x^5}$	☐ $\dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$
a^x	☐ $\dfrac{5\sqrt[3]{x^4}}{3}$
$\dfrac{-x^{-5}}{3}$	☐ $x \cdot a^{x-1}$
	☐ $\dfrac{-5x^{-6}}{3}$
	☐ $\dfrac{5}{3 \cdot x^6}$
	☐ $e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a)$

Aufgabe 3.4 (●)

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Sei $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + c \quad , c \in \mathbb{R}\, , \, n \in \mathbb{N}$.

Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ ist gegeben durch

1 ☐ $f'(x) = n \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot x^{n-2} + (n-2) \cdot x^{n-3} + ... + 2 \cdot x + 1$

2 ☐ $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1$

3 ☐ $f'(x) = n \cdot x^{n+1} + (n-1) \cdot x^n + (n-2) \cdot x^{n-1} + ... + 2 \cdot x^3 + 1$

4 ☐ $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1$

5 ☐ $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1$

Aufgabe 3.5 (●)

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Sei $f(x) = g(h(x))$.

Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ ist gegeben durch

1	☐	$g'(h(x))$
2	☐	$g'(h(x)) \cdot h(x)$
3	☐	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$
4	☐	$g(h'(x)) \cdot h'(x)$
5	☐	$g'(h'(x)) \cdot h(x)$

Aufgabe 3.6 (●)

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Sei $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ ist gegeben durch

1	☐	$\dfrac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$
2	☐	$\dfrac{h'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot h(x)}{(h(x))^2}$
3	☐	$\dfrac{h(x) \cdot g(x) - g(x) \cdot h(x)}{(h(x))^2}$
4	☐	$\dfrac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))}$
5	☐	$\dfrac{h(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

Aufgabe 3.7 ($\bullet$)

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Sei $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + c \quad , c, d \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}.$

Die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ ist gegeben durch

1 ☐ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n} + \frac{x^n}{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n-2} + ... + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{1} + c \cdot x + d$

2 ☐ $F(x) = (n+1) \cdot x^{n+1} + n \cdot x^n + (n-1) \cdot x^{n-1} + ... + 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + c \cdot x + d$

3 ☐ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + d$

4 ☐ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c \cdot x + d$

5 ☐ $F(x) = \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n-1}}{n} + \frac{x^{n-2}}{n-1} + ... + \frac{x^2}{3} + \frac{x^1}{2} + c \cdot x + d$

Aufgabe 3.8 (•)

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

Sei $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Das unbestimmte Integral $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ von $g(x)$ ist gegeben durch

1 ☐ $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = e^{|f(x)|} + c$

2 ☐ $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = |f(x)| \cdot |f'(x)| + c$

3 ☐ $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = e^{\ln|f(x)|} + c$

4 ☐ $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)}{f'(x)} + c$

5 ☐ $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$

Aufgabe 3.9 (•)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-x}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass durch $F(x) = (1 + 2x) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ gegeben ist.

IV. Kurvendiskussion von Polynomen und das Zeichnen von Graphen dieser Polynome

Zur Kurvendiskussion und dem daraus resultierenden Zeichnen von Graphen gehört es Grenzwert- und Symmetriebetrachtungen durchzuführen, Definitionslücken und Nullstellen zu bestimmen. Zudem sollen anhand richtig gebildeter Ableitungen Steigungs- und Krümmungsverhalten sowie Extrema und Wendepunkte ermittelt werden.

Aufgabe 4.1 (•)

Bestimmen Sie die Definitionsmengen folgender Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$

c) $h(x) = \dfrac{6x^7 + 2x^5 + 16x^2}{9x^2 + 3x}$

d) $i(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Aufgabe 4.2 (•)

Sind folgende Funktionen achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder nichts davon?

a) $f(x) = 2895x^7 + 394 \cdot 10^{19} x^5 + \frac{1}{75} x^3 + x$

b) $g(x) = 6x^7 + 2x^5 + 6x^2$

c) $h(x) = e \cdot 5x^{10} + 8x^4 + \sqrt[6]{2} x^2$

Aufgabe 4.3 $(\bullet\bullet)$

Beschreiben Sie sinnvoll in Worten, wie Sie vorgehen würden, um die Extrempunkte und deren Art einer Funktion $f(x)$ festzustellen.

Aufgabe 4.4 (●●)

Wählen Sie für das Auffinden von Wendepunkten einer Funktion $f(x)$ sinnvolle Schritte aus und nummerieren Sie diese in einer möglichst passenden Reihenfolge. Streichen Sie die nicht benötigten Schritte. (Mehrere richtige Lösungen sind möglich, entscheiden Sie sich für eine!)

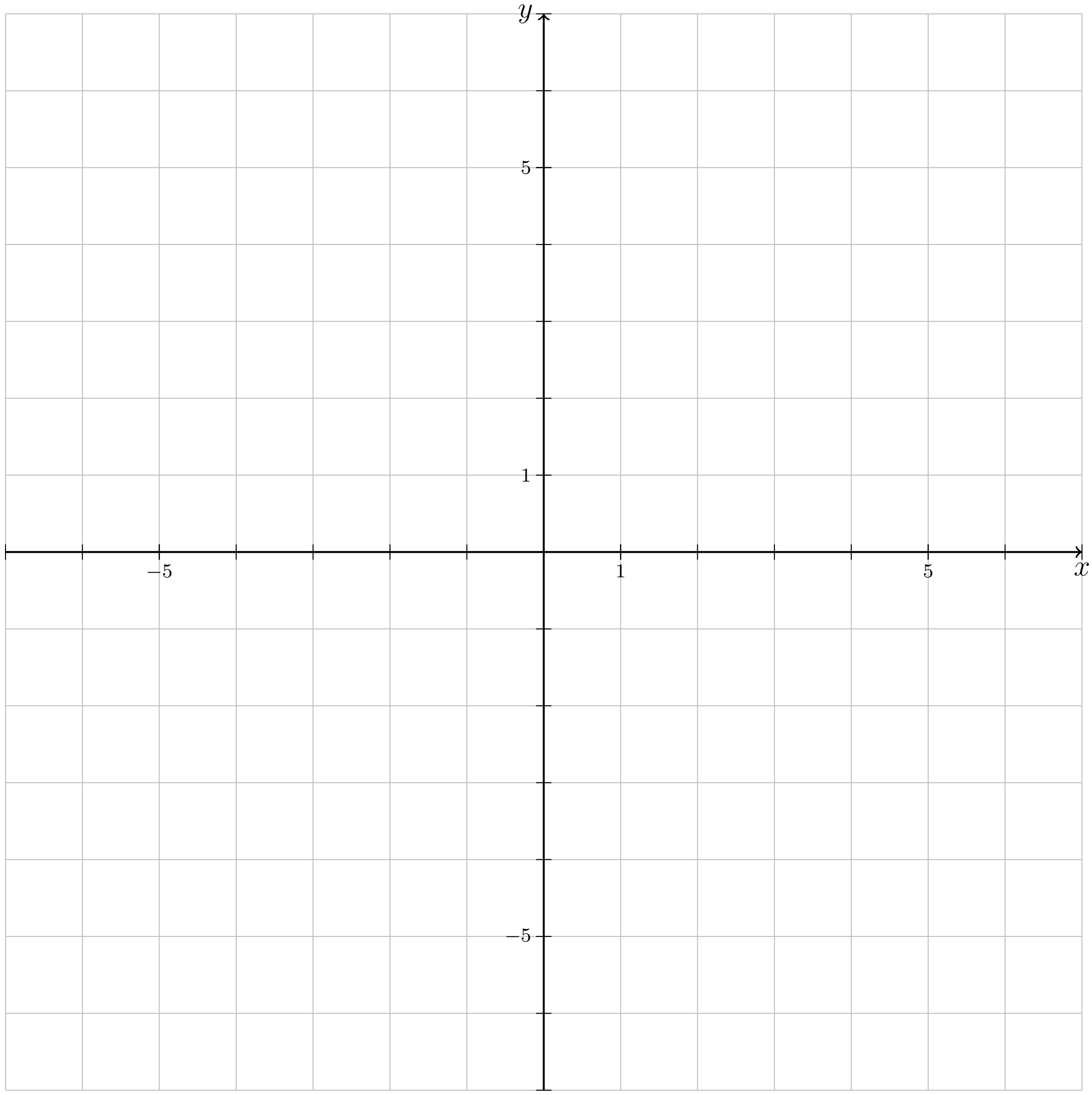
- ☐ Finden der Nullstellen x_i von $f''(x)$
- ☐ Bilden von $f'(x)$
- ☐ Einsetzen der x_i in $f'''(x)$. Falls $f'''(x_i) \neq 0$, so ist x_i die x-Koordinate des Wendepunkts.
- ☐ Bilden von $f'''(x)$
- ☐ Finden der Nullstellen von $f'(x)$
- ☐ Bilden von $f''(x)$
- ☐ Berechnung von $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- ☐ Vorzeichentabelle von $f''(x)$: Bei Wechsel des Vorzeichens von $f''(x)$
- ☐ Berechnung von $f(x_i) \to P(x_i/f(x_i))$ ist Wendepunkt von $f(x)$
- ☐ Bildung der vierten Ableitung

Aufgabe 4.5 (•)

Von der Funktion $f(x)$ ist nur untere Tabelle bekannt.

Welche Aussagen bezüglich der Extremwerte von $f(x)$ können Sie treffen?

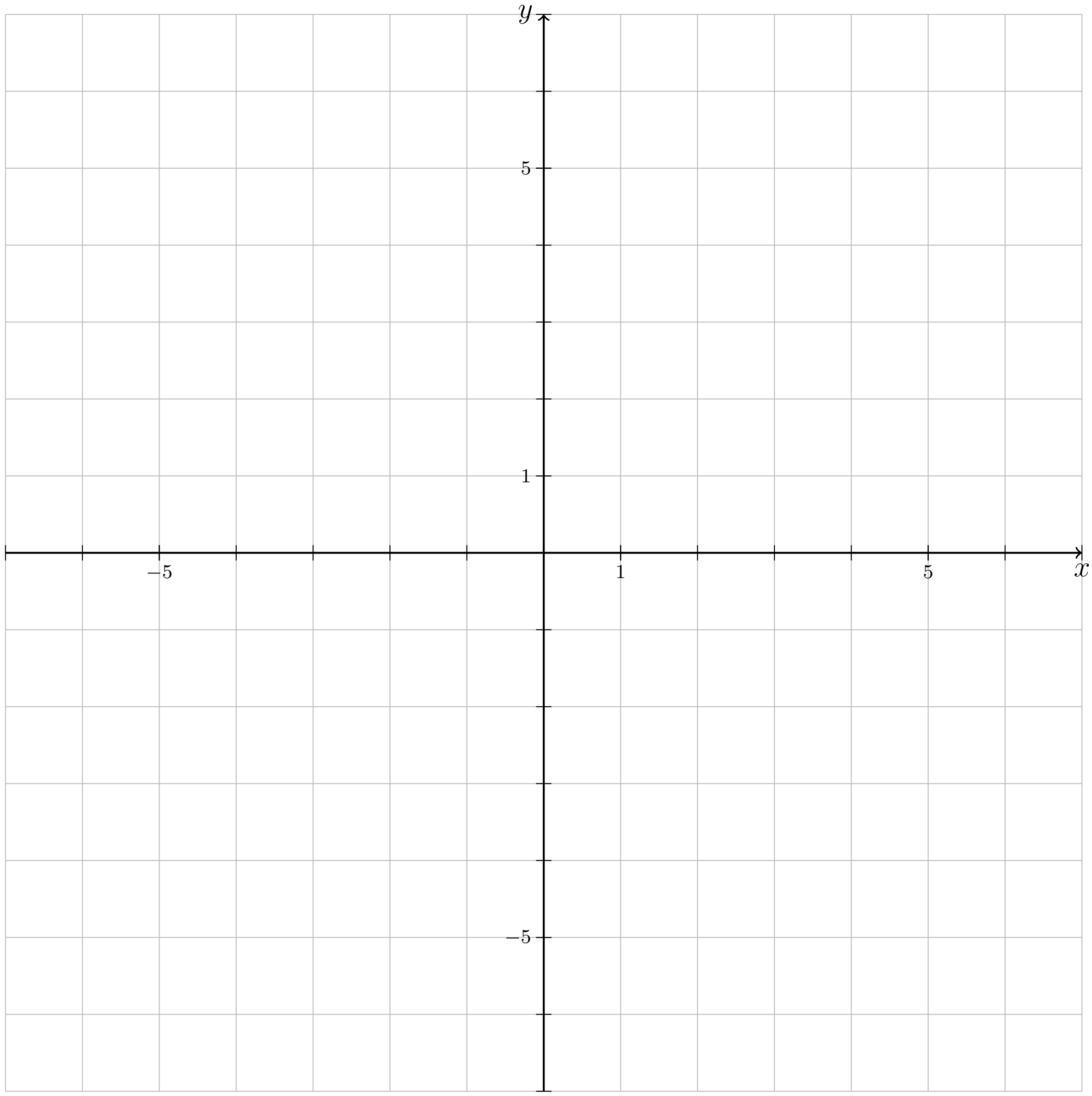
x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$\mathbf{f'(x)}$	< 0	0	> 0	0	< 0	0	> 0
$\mathbf{f(x)}$	...	-6.25	...	0	...	-6.25	...



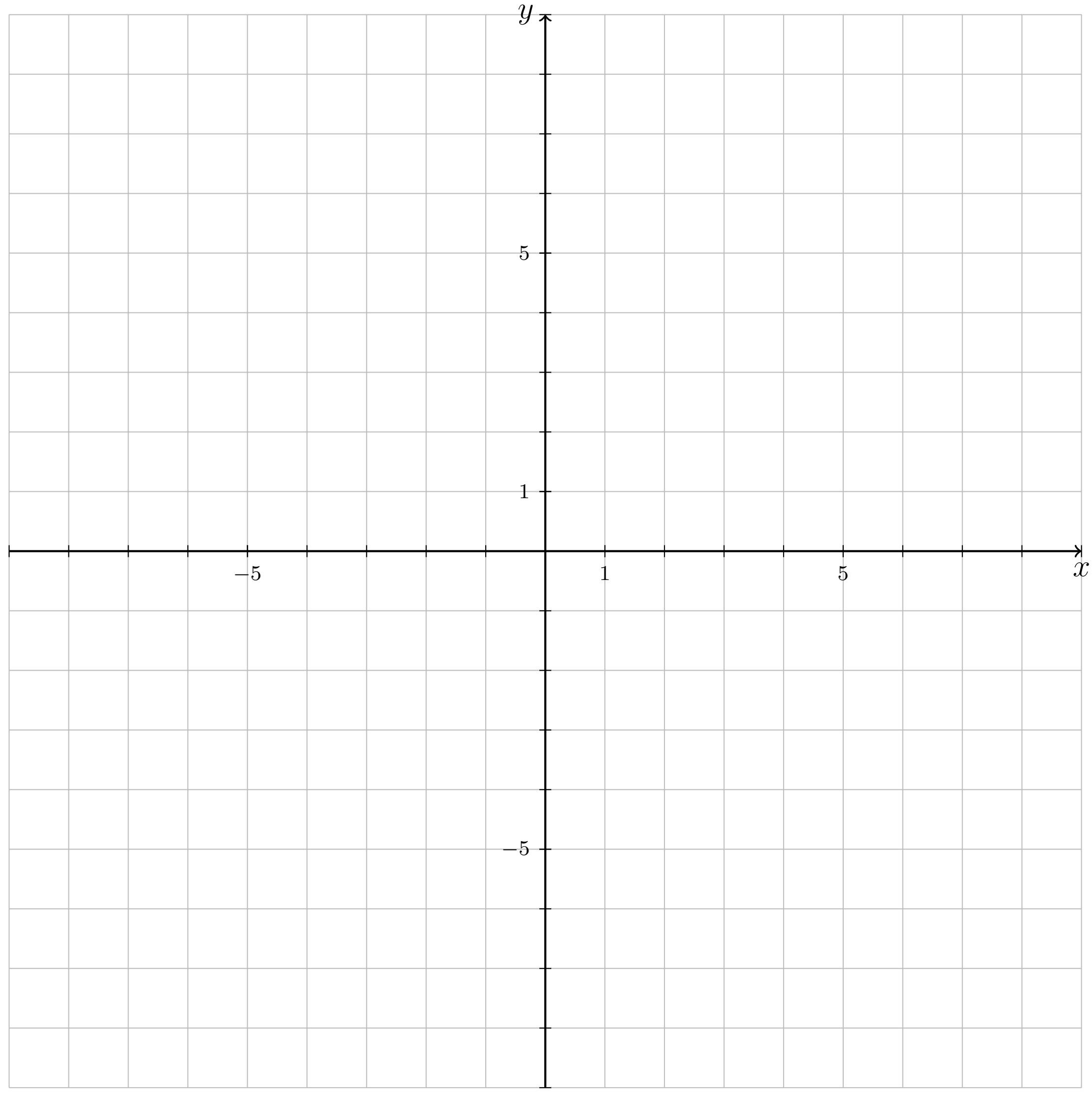
Aufgabe 4.6 (•)

Zeichnen Sie den Graph zu folgenden Funktionen in das Koordinatensystem ein.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$



b) $g(x) = \dfrac{8}{x+2} - 2$



V. Elementares Umformen von Termen & Gleichungen

Es sollen einfachere Terme vereinfacht werden, die sich v.a. aus Brüchen und Wurzelausdrücken zusammensetzen. Zum Thema Gleichungen werden lineare und quadratische Gleichungen sowie lineare Gleichungssysteme behandelt. Dabei wird ein versierter Umgang im Rechnen mit rationalen Zahlen verlangt, da dieser in der Regel mit dem Lösen von Gleichungen einhergeht.

Aufgabe 5.1 (●●)

Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich.

a) $\sqrt{14400}$

b) $\dfrac{\sqrt{4x}+\sqrt{9x}}{\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{98b^2}\cdot 7ab$

d) $\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a+b}}$

e) $(e^x+e^{2x})(e^{-x}+e^{-2x})$

Aufgabe 5.2 (●)

Lösen Sie folgende lineare Gleichungen nach x auf.

a) $34 - (18 - x) - 7 = 29(2 + x) - 25x$

b) $\dfrac{20 - 2x}{4} - 4x = 7 - \dfrac{8x - 5}{3}$

c) $\dfrac{2x - 3}{2} = 1\dfrac{1}{3}(2x + 3) - x - \dfrac{x + 6}{2}$

Aufgabe 5.3 ($\bullet$)

Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen nach x auf.

a) $x^2 + 12 = 28$

b) $2(4,5 - x) = (x + 2)(x - 8) + 4x$

c) $\dfrac{5x - 1}{4x - 1} = \dfrac{4x + 1}{5x + 1}$

Aufgabe 5.4 (●●)

Bestimmen Sie in den folgenden Gleichungen die Variable $p \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung genau eine Lösung besitzt.

a) $-x^2 - 4x + p = 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 2px + p + 3 = 0$

Aufgabe 5.5 (•)

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit einem Verfahren ihrer Wahl.

$$\begin{aligned} a) \quad I: &\quad 6x + 6 = 12 \\ II: &\quad 4y + 14 = 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad I: &\quad -(x - 2y) = 1 \\ II: &\quad 3x - 4y = -6 \end{aligned}$$

VI. Rechnen im Körper der rationalen & reellen Zahlen

Zum Rechnen mit rationalen und reellen Zahlen gehört der Umgang mit Prozentrechnung, binomische Formeln und Bruchterme sowie dem Auflösen und Vereinfachen von Formeln nach einer Variablen.

Aufgabe 6.1 (●●)

Es sei x eine positive Zahl. Es sei y um 20% kleiner als x und es sei z um 20% größer als y.

a) Welche der drei folgenden Aussagen ist richtig?

I) z ist größer als x.

II) z ist gleich x.

III) z ist kleiner als x

b) Wenn z ungleich x ist, um wie viel Prozent unterscheiden sich die beiden Zahlen?

Aufgabe 6.2 ($\bullet$)

Füllen Sie die Kästchen mit Zahlen $\in \mathbb{Z}$ aus, sodass eine sinnvolle Aussage entsteht.

$$9 \cdot \left(\frac{4}{3}s + t\right)^2 = \boxed{}\, s^2 + \boxed{}\, st + \boxed{}\, t^2$$

Aufgabe 6.3 (●)

Gegeben sei der Term $\frac{2x}{\sqrt{2x}} - \frac{10}{3\sqrt{2x}}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

Ordnen Sie die folgenden Umformungsschritte durch Nummerierung der Kästchen logisch ausgehend vom oben angegebenen Term.

$$\frac{6x-10}{3\sqrt{2x}} \quad \square$$

$$\frac{(6x-10)\sqrt{2x}}{3\cdot 2x} \quad \square$$

$$\frac{(3x-5)\sqrt{2x}}{3x} \quad \square$$

$$\frac{2(3x-5)\sqrt{2x}}{3\cdot 2x} \quad \square$$

$$\frac{6x}{3\cdot\sqrt{2x}} - \frac{10}{3\sqrt{2x}} \quad \square$$

Aufgabe 6.4 ($\bullet$)

I sei eine positive Konstante. Stellen Sie die Formel $T = \dfrac{V^2}{I}$ nach V um. Gehen Sie davon aus, dass $T \in \mathbb{Q}^+$.

- [ ] $V = \sqrt{IT}$
- [ ] $V = \dfrac{I}{T}$
- [ ] $V = \pm I^2 T^2$
- [ ] $V = I\sqrt{T}$
- [ ] $V = \sqrt{\dfrac{T}{I}}$
- [ ] $V = \pm\sqrt{IT}$
- [ ] $V = \pm\sqrt{\dfrac{T}{I}}$
- [ ] $V = \dfrac{T}{I}$